ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχ.βιβλίου σελ. 31

Α2. Ορισμός σχ.βιβλίου σελ. 22

Α3. Ορισμός σχ.βιβλίου σελ. 87

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $(3x-1)\left(8x^2-6x+1\right)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

ή $8x^2-6x+1=0$ $\quad \Delta=4,\ x_{1,2}=\frac{6\pm 2}{16}$ $\quad x_1=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$ ή $x_2=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

Ισχύει $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B \Rightarrow P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$

Άρα $P(A\cap B)=\frac{1}{4}, P(A)=\frac{1}{3}, P(A\cup B)=\frac{1}{2}$

Β2. Είναι $A-B=A\cap B' \Rightarrow A'-B'=A'\cap B=B-A$ άρα

$P(A'-B')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$

ή $P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=1-P(A)-P(A\cup B)'$

$=1-P(A)-1+P(A\cup B)=-\cancel{P(A)}+\cancel{P(A)}+P(B)-P(A\cap B)$

όμως $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{6-4+3}{12}=\frac{5}{12}$

άρα $P(A'-B')=P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{5-3}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

Δ : Το πολύ ένα από τα Α και Β, σημαίνει όχι ταυτόχρονα

άρα $P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

B3. Ε : μόνο ένα από τα Α, Β

$$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-\frac{1}{2}=\frac{4+5-6}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

B4. $9x^2-3x-2=0$

$$\Delta=9+72=81,\qquad x_{1,2}=\frac{3\pm 9}{18}=\begin{cases}\frac{12}{18}\\ -\frac{6}{18}\ \textit{απορρίπτεται}\end{cases}$$

άρα $P(\Gamma)=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$

Έστω Β, Γ ασυμβίβαστα τότε : $P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma)=\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{5+8}{12}=\frac{13}{12}>1$

άτοπο αφού $0\le P(B\cup\Gamma)\le 1$

άρα Β, Γ <u>**δεν**</u> είναι ασυμβίβαστα.

<u>**ΘΕΜΑ Γ**</u>

Γ1.

- Αφού το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10% άρα $\underline{f_1=10\%}$
- Αφού το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30% άρα $\underline{f_5=30\%}$
- $\hat{a}_3=f_3\cdot 360^0\Rightarrow 108=f_3\cdot 360^0\Rightarrow f_3=\frac{108}{360}=\frac{3\cdot 36}{360}=\frac{3}{10}=0,3$ άρα $f_3=30\%$
- Ισχύει $\bar{x}=\sum_{i=1}^{5}x_i\cdot f_i\Rightarrow 14=9\cdot 0,1+11\cdot f_2+13\cdot 0,3+15\cdot f_4+17\cdot 0,3$
  $\Rightarrow 14=0,9+11\cdot f_2+3,9+15\cdot f_4+5,1$
  $\underline{\Rightarrow 11\cdot f_2+15\cdot f_4=4,1}$

Επίσης $f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=1 \Rightarrow \underline{f_2+f_4=0,3}$

Έχουμε το $(\Sigma):\begin{cases} 11\cdot f_2+15\cdot f_4=4,1 \\ f_2+f_4=0,3 \end{cases} \Rightarrow ..... \Rightarrow f_2=0,1$ και $f_4=0,2$

Γ2. Ισχύει $s^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\cdot v_i}{v} \Rightarrow s^2=\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\cdot f_i \Rightarrow$

$s^2=25\cdot 0,1+9\cdot 0,1+1\cdot 0,3+1\cdot 0,2+9\cdot 0,3 \Rightarrow s^2=6,6 \Rightarrow s=\sqrt{6,6} \Rightarrow \underline{s\simeq 2,57}$

Άρα $CV=\dfrac{s}{\left|\bar{x}\right|}=\dfrac{2,57}{14}\simeq 0,18=18\%>10\%$

Άρα το δείγμα **<u>δεν</u>** είναι ομοιογενές.

Γ3. Ισχύει $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_i\cdot v_i}{v} \Rightarrow \bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot v_i+x_5\cdot v_5}{v} \Rightarrow 14=\dfrac{1780}{v}+17\cdot\dfrac{v_5}{v}$

$\Rightarrow 14=\dfrac{1780}{v}+17\cdot 0,3 \Rightarrow 14-5,1=\dfrac{1780}{v} \Rightarrow v=\dfrac{1780}{8,9} \Rightarrow \underline{v=200}$

Γ4. Έχουμε $\beta_i=\dfrac{a_i-\bar{a}}{Sa} \Rightarrow \beta_i=\dfrac{a_i}{Sa}-\dfrac{\bar{a}}{Sa} \Rightarrow \underline{\beta_i=\dfrac{1}{Sa}\cdot a_i-\dfrac{\bar{a}}{Sa}}$, με $i=1,2,3,4,5$

Λόγω της γνωστής εφαρμογής έχουμε :

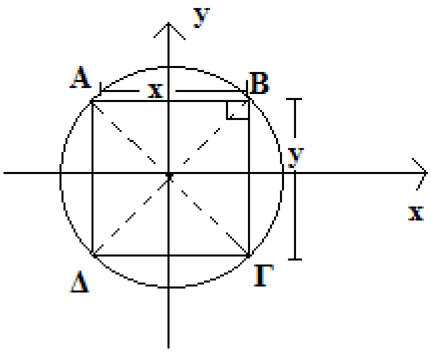
$\bar{\beta}=\left(\dfrac{1}{Sa}\right)\cdot\bar{a}-\dfrac{\bar{a}}{Sa} \Rightarrow \bar{\beta}=0$

$S_\beta=\dfrac{1}{S_a}\cdot S_a \Rightarrow S_\beta=1$

ή θεωρώ $\beta_i=w_i-\dfrac{\bar{a}}{S_a}$ με $w_i=\dfrac{1}{S_a}\cdot a_i$, με $i=1,2,3,4,5$

Ισχύει $\begin{cases} \bar{w} = \dfrac{1}{S_a}\cdot \bar{a} \quad \kappa\alpha\iota \quad \bar{\beta} = \bar{w} - \dfrac{\bar{a}}{S_a} = \dfrac{\bar{a}}{S_a} - \dfrac{\bar{a}}{S_a} = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ S_w = \dfrac{1}{S_a}\cdot S_a = 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad s_\beta = s_w = 1 \end{cases}$ λόγω της γνωστής εφαρμογής.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>



$$\boxed{R = 5}$$

$$E = x \cdot y\,,\ \boxed{x > 0}$$

Δ1. Στο $\overset{\triangle}{\mathrm{A}\mathrm{B}\Gamma}$ ορθογώνιο ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, άρα

$$x^2 + y^2 = \mathrm{A}\Gamma^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (2R)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 100 \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$$

Πρέπει $100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow x \in (0,10)$

Οπότε το εμβαδό είναι $E(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}, x \in (0,10)$

Δ2. $E(x) = f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} \cdot (-2x) = \sqrt{100 - x^2} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \pm 5\sqrt{2}$$

	0		$5\sqrt{2}$		10
f'		$+$		$-$	
f		↗		↘	
			Μ		

Για $x=5\sqrt{2}$ έχουμε μέγιστο εμβαδό

Η άλλη πλευρά $y=\sqrt{100-\left(5\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}$

Άρα $x=y=5\sqrt{2}$, δηλαδή ΑΒΓΔ τετράγωνο.

Δ3.

<u>Α΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x}=\frac{1}{98}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{x}=\frac{1}{98}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\frac{1}{98}\cdot f'(1)=\frac{1}{\cancel{98}}\cdot\frac{\cancel{98}}{\sqrt{99}}=\frac{1}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}$$

<u>Β΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\cdot\sqrt{100-(x+1)^2}-\sqrt{99}}{98\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\cdot\sqrt{99-x^2-2x}-\sqrt{99}}{98\cdot x}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^2\cdot\left(99-x^2-2x\right)-99}{98x\cdot\left[(x+1)\sqrt{99-x^2-2x}+\sqrt{99}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+2x+1\right)\cdot\left(99-x^2-2x\right)-99}{98x\cdot\left[(x+1)\sqrt{99-x^2-2x}+\sqrt{99}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^4-4x^3+94x^2+196x}{98x\cdot\left[(x+1)\sqrt{99-x^2-2x}+\sqrt{99}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(-x^3-4x^2+94x+196\right)}{98\cancel{x}\cdot\left[(x+1)\sqrt{99-x^2-2x}+\sqrt{99}\right]}=$$

$$=\frac{196}{98\cdot\left(\sqrt{99}+\sqrt{99}\right)}=\frac{2}{2\sqrt{99}}=\frac{1}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ4.

$$A-B\subseteq A\Rightarrow P(A-B)\le P(A)$$

$$\overset{f\nearrow}{\Longrightarrow} f\left(P(A-B)\right)\le f\left(P(A)\right)$$

$$P(A-B)\sqrt{100-P^2(A-B)}\le P(A)\sqrt{100-P^2(A)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}$$

Ισχύει

$$0<P(A-B)\le 1$$

$$0<P^2(A-B)\le 1$$

$$0>-P^2(A-B)\ge -1$$

$$100>100-P^2(A-B)\ge 99$$

$$\frac{1}{10}<\frac{1}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\le \frac{1}{\sqrt{99}} \quad (1)$$

και $0\le P(A)\le 1 \quad (2)$

Από (1) και (2) πολλαπλασιάζω κατά μέλη :

$0\le \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\le \frac{1}{\sqrt{99}}$ δηλαδή $\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\in\left(0,5\sqrt{2}\right]$

και αφού $\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}$ άρα και $\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\in\left(0,5\sqrt{2}\right]$

Η f όμως είναι $\nearrow$ στο $\left(0,5\sqrt{2}\right]$

άρα $f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$