ΟΝΟΜΑ:

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2014

ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: **ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Ημερομηνία: Κυριακή 27 Απριλίου 2014
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράσταση μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:*

i) Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α έχει αντίστροφη, τότε $f^{-1}(f(x))=x$, για κάθε $x\in A$.

Μονάδες 2

ii) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 2

iii) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Μονάδες 2

iv) Μια συνεχής στο (α, β) συνάρτηση, παίρνει σε κάθε περίπτωση στο (α, β) μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή.

Μονάδες 2

v) Αν f συνεχής συνάρτηση στο [α, β] και $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta}\lambda f(x)dx=\lambda\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί z, z_1 και w με $z=\alpha+\beta i$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε ο

$$z_1=\frac{1+(\beta-2)i}{\alpha+2-i} \text{ να είναι φανταστικός και } \left|(1-i)\,\mathrm{Im}\left(w-\frac{1}{2}i\right)\right|=\sqrt{2}\left|w+\frac{1}{2}i\right|.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία ε με εξίσωση $x-y+4=0$.

Μονάδες 6

β) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι η παραβολή με εξίσωση $x^2+2y=0$.

Μονάδες 6

Β2. Ν.Δ.Ο. η απόσταση ενός σημείου $M_0(x_0,y_0)$ της παραβολής $x^2+2y=0$ από την ευθεία ε: $x-y+4=0$ είναι $\frac{|x_0^2+2x_0+8|}{2\cdot\sqrt{2}}$ και να βρεθεί το ελάχιστο αυτής.

Μονάδες 5

Β3. α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C των εικόνων του $\bar{w}$ στο μιγαδικό επίπεδο ότι είναι C: $y=\frac{x^2}{2}$

Μονάδες 3

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από την ευθεία $x-y+4=0$ και την γραμμή C του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=1$, $g(1)=0$ και ικανοποιούν τις σχέσεις: $f'(x)-f(x)=e^x g'(x)-1$ ①, $2f(x)+x^2-2x\geq 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x g(x)+1$, πολλαπλασιάζοντας την ① με e^{-x}

Μονάδες 3

Γ2. α) Ν.Δ.Ο. $f'(1)=0$

β) Να υπολογίσετε το $g'(1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)\,g\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\right]=0$.

Μονάδες 10 (4+2+4)

Γ3. Αν, επιπλέον $g(x)=(x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, από το σημείο $M(1, \lambda)$ άγονται το πολύ τρεις εφαπτόμενες στη γραφική παράσταση της συνάρτησης h με $h(x)=e^x(1-x)+1$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\int_0^{g''(x)} 2t^2 e^{t^2}\,dt < g''(x)\, e^{[g''(x)]^2} - g''(x), \text{ ~~για κάθε~~ } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(2)=-2,\ \int_{-2}^{g(0)} e^{t^2}\,dt \cdot \int_{-2}^{g(1)} e^{t^2}\,dt < 0 .$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα, αφού δείξετε ότι η $h(x)=\int_0^x 2t^2e^{t^2}dt - x\cdot e^{x^2}+x,\ x\in\mathbb{R}$ είναι $\downarrow$ στο $\mathbb{R}$

Μονάδες 8

Δ2. i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (0, 1)$, τέτοιο, ώστε $g(\rho)=-2$. Δίνεται $f(x)=\int_{-2}^{g(x)} e^{t^2}dt,\ x\in[0,2]$

ii) Ν.Δ.Ο. υπάρχει $x_0\in(\rho,2)$ ώστε $g'(\rho)<g'(x_0)<g'(2) \Leftrightarrow g'(\rho)<0<g'(2)$

Μονάδες 10

Δ3. Ν.Δ.Ο η $g \downarrow$ στο $[x_0,+\infty)$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x-3}{g(x)+2}\right)$.

Μονάδες 7

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!