# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 251

**Α2.** Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 273

**Α3.** Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 150

**Α5.** ***α)*** Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Λ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Θέτουμε $z = x + yi$ οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$2(x^2+y^2)+2xi-4-2i=0 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2-4+(2x-2)i=0$$

Άρα $\left.\begin{array}{r} 2x^2+2y^2-4=0 \\ 2x-2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=1$

Οπότε $2\cdot 1^2+2y^2-4=0 \Leftrightarrow 2y^2=2 \Leftrightarrow y=\pm 1$

**Β2.** Για $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$

$$w=3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39}=3\left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right]^{39}=3\left[\frac{1^2+2i+i^2}{1^2+1^2}\right]^{39}=3\left(\frac{2i}{2}\right)^{39}=$$
$$=3\cdot i^{39}=3\cdot i^{4\cdot 9+3}=3(i^4)^9\cdot i^3=3i^3=-3i$$

**Β3.** Για $w=-3i$, $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$ η ισότητα γίνεται:

$$|u-3i|=|4(1+i)-(1-i)-i| \Leftrightarrow |u-3i|=|4+4i-1+\cancel{i}-\cancel{i}|$$

$$\Leftrightarrow |u-3i|=|3+4i| \Leftrightarrow |u-3i|=\sqrt{3^2+4^2} \Leftrightarrow |u-3i|=5$$

Επομένως ο **γεωμετρικός τόπος** του u είναι **κύκλος** με κέντρο **Κ(0, 3)** και ακτίνα **ρ = 5**.

## ΘΕΜΑ Γ

$$h(x) = x - \ln(e^x + 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

**Γ1.** $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{e^x + 1} \cdot e^x = \dfrac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \dfrac{1}{e^x + 1}$

άρα η h γνησίως αύξουσα στο R.

$h''(x) = -\dfrac{1}{(e^x + 1)^2} \cdot e^x = \dfrac{-e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$ άρα η h κοίλη στο $\mathbb{R}$

**Γ2.** $e^{h(2h'(x))} < \dfrac{e}{e+1}$

$$\ln e^{h(2h'(x))} < \ln \frac{e}{e+1}$$

$$h(2h'(x)) < \ln \frac{e}{e+1} = \ln e - \ln(e+1)$$

$$h(2h'(x)) < h(1)$$

$$\Leftrightarrow 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^x + 1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x + 1 > 2 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$$



**Γ3.** $h(x) = x - \ln\left(e^x + 1\right)$

**α.** $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln e^x - \ln\left(e^x + 1\right)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

Θέτω $u = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

$$\lim_{x \to +\infty} u = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

άρα $\lim\limits_{u \to 1} \ln u = \ln 1 = 0$ άρα Ο.Α. ε: y = 0.

**β.** $\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x)-x] = -\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^x+1\right)$

**$1^{ος}$ τρόπος**

$u = e^x + 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} u = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right) = 1$

οπότε $-\lim\limits_{u\to1}\ln u = -\ln 1 = 0$, έτσι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[h(x)-x\right] = 0$

άρα πλάγια ασύμπτωτη y = x

**$2^{ος}$ τρόπος**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)}{x} \overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}$$

Γιατί : θέτω $u = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} u = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1} = 0$

άρα $\lim\limits_{u\to0^-}\ln u = -\infty$

οπότε D'LH $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{e^x+1}{e^x}\cdot\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}}{1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x+1} = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\cancel{x} - \ln(e^x+1) - x) = \lim\limits_{x\to-\infty}[-\ln(e^x+1)] = \lim\limits_{u\to1}(-\ln u) = -\ln 1 = 0$

$u = e^x + 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1) = 1$ $\quad$ άρα ε: y = x

## Γ4.

$$\varphi(x)=e^{x}\left[h(x)+\ln 2\right]$$
$$\varphi(x)=0 \Leftrightarrow e^{x}\cdot(h(x)+\ln 2)=0$$

$$e^{x}>0$$

$$h(x)=-\ln 2 \Leftrightarrow \ln\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=\ln 2^{-1} \Leftrightarrow \frac{e^{x}}{e^{x}+1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^{x}=e^{x}+1 \Leftrightarrow e^{x}=1=e^{0} \Leftrightarrow x=0$$

Μελετώ το πρόσημο της $\varphi(x)$ στο $[0,\,1]$,

$$\varphi(x)=e^{x}\left(\ln\frac{e^{x}}{e^{x}+1}+\ln 2\right)=e^{x}\cdot\ln\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}$$

$$\varphi(x)\geq 0 \Leftrightarrow \ln\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}\geq 0=\ln 1 \Leftrightarrow \frac{2e^{x}}{e^{x}+1}\geq 1 \Leftrightarrow 2e^{x}\geq e^{x}+1 \Leftrightarrow e^{x}\geq 1=e^{0}$$
$$\Leftrightarrow x\geq 0$$

άρα η $\varphi(x)\geq 0$ στο $[0,\,1]$

οπότε

$$E(\Omega)=\int_0^1 e^{x}\cdot\ln\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}dx=\left[e^{x}\cdot\ln\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}\right]_0^1-\int_0^1 e^{x}\cdot\frac{e^{x}+1}{2e^{x}}\cdot\frac{2e^{x}}{(e^{x}+1)^2}dx$$

$$=\left[e^{x}\cdot\ln\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^{x}}{e^{x}+1}dx=\left(e\cdot\ln\frac{2e}{e+1}-e^{0}\cdot\ln\frac{2\cdot e^{0}}{e^{0}+1}\right)-\left[\ln(e^{x}+1)\right]_0^1$$

$$==e\cdot\ln\frac{2e}{e+1}-\ln\frac{2}{2}-\ln(e+1)+\ln 2=e\cdot\ln\frac{2e}{e+1}-\ln(e+1)+\ln 2=$$

$$=e\cdot\ln\frac{2e}{e+1}+\ln\frac{2}{e+1}\text{ τ.μ.}$$

# ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Α) συνεχής σε $x_0=0$ , f γνησίως αύξουσα

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(x\right)'}=\lim_{x\to 0} e^x=e^0=1=f(0)$$

Άρα συνεχής $x_0=0$

Για $x\neq 0,\quad f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x-(-1)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$

$$g(x)=xe^x-e^x+1,\quad x\in R$$

$$g'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x$$

| x | $-\infty$ 0 $+\infty$ |
|---|---|
| g’ | − 0 + |
| g | ↘ ↗ |

Ο.Ε.

$g(x)\geq g(0),\forall x\in\mathbb{R}$

$g(0)=0e^0-e^0+1=0 \qquad g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $\quad f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}\geq 0$ για κάθε $x\in R$ f συνεχής σε $A=\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{D.L.H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{D.L.H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

Επομένως $f'(0)=\dfrac{1}{2}$, άρα $f'(x)>0$ ,δηλαδή $f\nearrow,\forall x\in\mathbb{R}$

**Δ2. α)** **$1^{ος}$ τρόπος**

Η εξίσωση για $x=0$ γίνεται

$$\int_1^{2f'(0)} f(u)d(u)=0 \Leftrightarrow \int_1^1 f(u)fu=0$$

Που ισχύει άρα έχει ρίζα το $x_0=0$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}\overset{D.L.H}{=}\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x-1)\cdot\frac{1}{x}=(-1)\cdot 0=0$$

Επομένως το σύνολο των τιμών της f είναι το διάστημα (0, ∞)

που σημαίνει ότι

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in R$$

τότε

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)\ln=0 \Leftrightarrow F\big(2f'(x)\big)-F(1)=0 \Leftrightarrow F\big(2f'(x)\big)=F(1),$$

όπου η f με αρχική την f.

Επειδή $F'(x)=f(x)>0$ για κάθε $x>0$ έχουμε την f 1-1, οπότε

$$F\big(2f'(x)\big)=F(1)\Leftrightarrow 2f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=f'(0)$$

Η f′ είναι γνησίως αύξουσα, αφού η τιμή της f είναι κυρτή οπότε είναι 1-1 έτσι $f'(x)=f'(0)\Leftrightarrow x=0,$ μοναδική λύση.

**$2^{ος}$ τρόπος**

Θεωρούμε $h(x)=\int_1^{2f'(x)} f(u)du$

$f$ συνεχής, $f\,'$ παραγωγίσιμη

άρα και $h(x)=\int_1^{2f'(x)} f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων

$h'(x)=f\left(2f'(x)\right)\left(2f'(x)\right)'=2f\left(2f'(x)\right)f''(x)$, όμως $f''(x)\geq 0$ ( $f$ κυρτή)

Το 0 ισχύει σε διακριτά σημεία άρα $h'(x)\geq 0$, οπότε $h\nearrow$ άρα μοναδική λύση.

**3$^{ος}$ τρόπος**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(e^x-1\right)\right]=0\cdot(-1)=0$$

άρα $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ , $f\nearrow$

Για $u>1 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(u)>f(1)\Rightarrow f(u)>e-1>0$

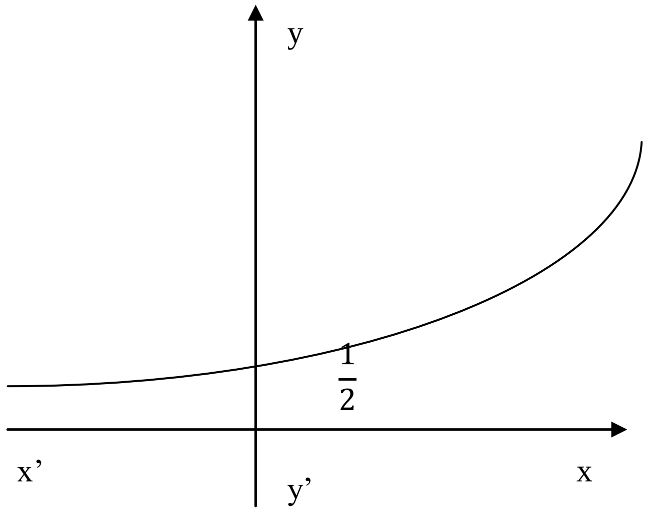
άρα αν $2f'(x)>1$ τότε $\int_1^{2f'(x)} f(u)du>0$ ΑΤΟΠΟ

αν $2f'(x)<1$ τότε $\int_1^{2f'(x)} f(u)du<0$ ΑΤΟΠΟ

Επομένως $2f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow f'(x)=f'(0)\Leftrightarrow x=0$

$f'\nearrow$, "1−1"

**β) 1ος τρόπος**




$$y'(t)=f'\big(x(t)\big)\cdot x'(t)\Leftrightarrow$$
$$y'(t_0)=f'\big(x(t_0)\big)\cdot x'(t_0)$$
$$\cancel{y'(t_0)}=f'\big(x(t_0)\big)\cdot 2\,\cancel{y'(t_0)}$$
$$f'\big(x(t_0)\big)=\frac{1}{2}$$
$$f'\big(x(t_0)\big)\overset{f'\nearrow}{=}f'(0)$$
$$x(t_0)=0$$
$$f(0)=1$$
$$A(0,1)$$

**2ος τρόπος**

$$f\big(x(t)\big)=\frac{e^{x(t)}-1}{x(t)}$$
$$f'\big(x(t)\big)=\frac{e^{x(t)}\big[x(t)-1\big]+1}{\big[x(t)\big]^2}\cdot x'(t)$$

$$y'(t)=\frac{e^{x(t)}\big[x(t)-1\big]+1}{\big[x(t)\big]^2}\cdot x'(t)\qquad (1)$$

Για $t=t_0$, $2y'(t_0)=x'(t_0)$

Από (1) για $t=t_0$

$$y'(t_0)=\frac{e^{x(t_0)}\big[x(t_0)-1\big]+1}{\big[x(t_0)\big]^2}\cdot 2y'(t_0)\Leftrightarrow$$
$$\frac{e^{x(t_0)}\big[x(t_0)-1\big]+1}{\big[x(t_0)\big]^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$f'\big[x(t_0)\big]=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\qquad (f\nearrow \text{ άρα "1-1"})$$

$$f'\big[x(t_0)\big]=f'(0)\Rightarrow x(t_0)=0\qquad f(0)=1\quad \text{άρα}\quad A(0,1)$$

**Δ3.** $g(x)=\left(xf(x)+1-e\right)^2(x-2)^2,\ x>0$

$$g(x)=\left(x\frac{e^x-1}{x}+1-e\right)^2(x-2)^2=$$
$$=\left(e^x-e\right)^2(x-2)^2$$
$$g'(x)=2\left(e^x-e\right)e^x(x-2)^2+2(x-2)\left(e^x-e\right)^2=$$
$$=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left(e^x(x-2)+e^x-e\right)=$$
$$=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left(xe^x-e^x-e\right)$$

Θεωρώ $F(x)=\left(xe^x-e^x-e\right)$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$F(1)=e-e-e=-e<0$$
$$F(2)=2e^2-e^2-e=e^2-e>0$$

Επομένως $F(1)F(2)<0$ ισχύει το Θεώρημα Bolzano στο $[1,2]$, άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0$ στο $(1,2)$.

Επίσης $F(x)\nearrow$ στο $(0,+\infty)$άρα η $F(x)$ έχει μοναδική λύση την $x_0\in(1,2)$.

Επομένως $g'(x)=0\Rightarrow e^x-e=0\Rightarrow x=1$

ή $(x-2)=0\Rightarrow x=2$

ή $xe^x-e^x-e=0\Rightarrow x=x_0\in(1,2)$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $x_0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\left(e^x-e\right)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $(x-2)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $xe^x-e^x-e$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

T.E. T.M. T.E.

$g(1)$ $g(x_0)$ $g(2)$

**Ο Αγώνας ΣΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ**