ΕΠΑ.Λ. Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελ.334.
Β.1. σελ. 213.
Β.2. σελ. 212.
Γ. **α** – Λ
β – Σ
γ – Λ
δ – Λ
ε – Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α) Έχουμε $z=\frac{1+2w}{1-w}\ (w\neq 1)\Leftrightarrow z(1-w)=1+2w\Leftrightarrow z-zw=1+2w\Leftrightarrow$

$2w+zw=z-1\Leftrightarrow w(2+z)=z-1\Leftrightarrow$

$w=\frac{z-1}{z+2}\ (z\neq -2)\Leftrightarrow w+1=\frac{z-1}{z+2}+1\Leftrightarrow$

$w+1=\frac{z-1+z+2}{z+2}=\frac{2z+1}{z+2}$.

Από την υπόθεση $|w+1|=1$.

Άρα

$|w+1|=\left|\frac{2z+1}{z+2}\right|=1\Leftrightarrow|2z+1|=|z+2|\Leftrightarrow$

$|2z+1|^2=|z+2|^2\Leftrightarrow(2z+1)(2\overline{z}+1)=(z+2)(\overline{z}+2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4z\overline{z}+2z+2\overline{z}+1=z\overline{z}+2z+2\overline{z}+4\Leftrightarrow 3|z|^2=3\Leftrightarrow|z|=1$.

β) **i)** Έχουμε $|z_1|=1\Leftrightarrow|z_1|^2=1\Leftrightarrow z_1\overline{z}_1=1\Leftrightarrow\overline{z}_1=\frac{1}{z_1},\ \overline{z}_2=\frac{1}{z_2}\ ,\overline{z}_3=\frac{1}{z_3}$

Επειδή $z\in R\Leftrightarrow z=\overline{z}$ (Πρέπει να αποδειχθεί) αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{\alpha}=\alpha$.

Οπότε

$$\overline{\alpha}=\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{z_3}\right)}+\overline{\left(\frac{z_2+z_3}{z_1}\right)}+\overline{\left(\frac{z_1+z_3}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_3}+\frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_3}+\frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_1}+\frac{\overline{z}_3}{\tilde{z}_1}+\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}+\frac{\overline{z}_3}{\overline{z}_2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_3}}+\frac{\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_3}}+\frac{\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1}}+\frac{\frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_1}}+\frac{\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_2}}+\frac{\frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_2}}=\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_2}{z_3}=$$

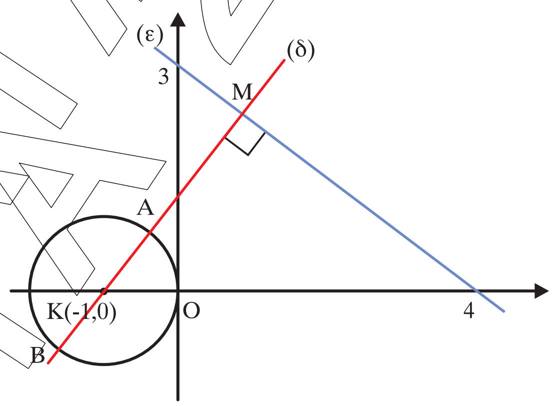
$$=\frac{z_1+z_2}{z_3}+\frac{z_2+z_3}{z_1}+\frac{z_1+z_3}{z_2}=\alpha .$$

ii) Έχουμε $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right)=\dfrac{\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right)+\left(\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}+\frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_3}+\frac{\overline{z}_3}{\overline{z}_1}\right)}{2}=$

$$\frac{\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}}{2}=\frac{\frac{z_1+z_2}{z_3}+\frac{z_1+z_3}{z_2}+\frac{z_2+z_3}{z_1}}{2}=$$

$$=\frac{-\frac{z_3}{z_3}-\frac{z_2}{z_2}-\frac{z_1}{z_1}}{2}=-\frac{3}{2}$$

γ) **<u>1ος Τρόπος</u>**



Έχουμε

$$d(K,\varepsilon)=\frac{|3(-1)+4\cdot 0-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3$$

Οπότε

Ελάχιστη απόσταση είναι:
$(AM)=d(K,\varepsilon)-\rho=3-1=2$ και

μέγιστη $(BM)=d(K,\varepsilon)+\rho=3+1=4$.

<u>2ος Τρόπος</u>

Έχουμε $(\varepsilon)\perp(\delta)\Leftrightarrow \lambda_\delta=\frac{4}{3}$. Άρα $(\delta): y=\frac{4}{3}(x+1)\Leftrightarrow 4x-3y+4=0$. Για να βρούμε το Μ λύνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l}3x+4y-12=0\\4x-3y+4=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow (x,y)=\left(\frac{4}{5},\frac{12}{5}\right) \text{ άρα } M\left(\frac{4}{5},\frac{12}{5}\right)$$

$$(KM)=\sqrt{\left(\frac{4}{5}+1\right)^2+\left(\frac{12}{5}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{225}{25}}=3$$

Οπότε

Ελάχιστη απόσταση είναι: $(AM)=(KM)-\rho=3-1=2$ και

μέγιστη $(BM)=(KM)+\rho=3+1=4$.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι $g(x)=e^x+x$ (1). Τότε $g'(x)=e^x+1>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.
Άρα η συνάρτηση g είναι 1 – 1 ως γνησίως αύξουσα.

β) Έχουμε

$$xf'(x)=\frac{x+1}{e^{f(x)}+1}\Leftrightarrow xf'(x)\left(e^{f(x)}+1\right)=x+1\Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{f(x)}+f'(x)=1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}+f(x)\right)'=(x+\ln x)'\Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x+c.$$

Για $x=1$ έχουμε $e^{f(1)}+f(1)=1+c$ με $c=0$. Άρα
$e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x=e^{\ln x}+\ln x$ και λόγω της (1) έχουμε
$g(f(x))=g(\ln x)$. Αλλά η g είναι 1-1 . Άρα $f(x)=\ln x$.

γ) Είναι $h(x)=\dfrac{f(x)-1}{x}$.

Τότε $h'(x)=\left(\dfrac{\ln x-1}{x}\right)'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x-1)}{x^2}=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$.

Αν $h'(x)=0$ ή $2-\ln x=0$ ή $\ln x=2$ ή $x=e^2$

x	0		e^2		$+\infty$
h΄(x)		+	0	−	
h(x)		↗		↘	

Η h είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in\left(0,e^2\right]$

Η h είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in[e^2,+\infty)$

Έχουμε $h_{\max}=h\left(e^2\right)=\dfrac{\ln e^2-1}{e^2}=\dfrac{1}{e^2}$

<u>Πεδίο τιμών</u>:

$$\lim_{x\to0^+}h(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}(\ln x-1)=(+\infty)(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$h(A) = \left(\lim_{x\to 0^+} h(x), h\left(e^2\right)\right] \cup \left(\lim_{x\to+\infty} h(x), h\left(e^2\right)\right] = \left(-\infty, \frac{1}{e^2}\right] \cup \left(0, \frac{1}{e^2}\right] = \left(-\infty, \frac{1}{e^2}\right].$$

δ) Έχουμε $\left(\dfrac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x}$.

Για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $\dfrac{\eta\mu x}{e} > 0$, $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e} > 0$

Λογαριθμίζουμε τη σχέση και έχουμε:

$$\ln\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \ln\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right) = \eta\mu x \cdot \ln\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right) \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x \cdot \left(\ln(\eta\mu x) - \ln e\right) = \eta\mu x \cdot \left(\ln(\sigma\upsilon\nu x) - \ln e\right) \Leftrightarrow \frac{\ln(\eta\mu x) - 1}{\eta\mu x} = \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x) - 1}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(\eta\mu x) = h(\sigma\upsilon\nu x) \quad (2)$$

Για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύουν οι σχέσεις $0 < \eta\mu x < 1$, $0 < \sigma\upsilon\nu x < 1$ και $(0,1) \subset \left(0, e^2\right)$.

Η h είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0, e^2\right]$. Από τη (2) έχουμε

ημx = συνx ή εφx = 1 ή $x = \dfrac{\pi}{4}$.

ε) Έχουμε $h'(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x^2}$ και

$$h''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot (2 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 4x + 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{x(2\ln x - 5)}{x^4} = \frac{2\ln x - 5}{x^3}.$$

$h''(x) = 0$ ή $2\ln x - 5 = 0$ ή $\ln x = \dfrac{5}{2}$ ή $x = e^{\frac{5}{2}}$.

x	0	$e^{5/2}$	$+\infty$
h΄΄(x)	−	0	+
h΄(x)	↘		↗

Η h είναι κοίλη στο διάστημα $\left(0, e^{5/2}\right]$.

Η h είναι κυρτή στο διάστημα $\left[e^{5/2}, +\infty\right)$.

$$h'_{\min}\left(e^{5/2}\right) = \frac{2 - \ln e^{5/2}}{\left(e^{5/2}\right)^2} = \frac{2 - \frac{5}{2}}{e^5} = -\frac{1}{2e^5}.$$

Τότε $h'(x) \geq -\dfrac{1}{2e^5}$ για κάθε $x > 0$.

Η h είναι συνεχής στο $\left[x_1, x_2\right]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, x_2\right)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x^2}$. Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(x_1, x_2\right)$ ώστε $h'\left(\xi\right) = \dfrac{h\left(x_2\right) - h\left(x_1\right)}{x_2 - x_1}$ (3).

Αλλά για κάθε $x > 0$ επομένως και για το $\xi > 0$ ισχύει $h'(\xi) \geq -\dfrac{1}{2e^5}$ (4).

Από τις (3) και (4) έχουμε $\dfrac{h\left(x_2\right) - h\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} \geq -\dfrac{1}{2e^5}$.

ΘΕΜΑ 4$^{\text{ο}}$

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \displaystyle\int_3^x \left(\int_1^u f(t)dt \right) du - 2x + 6 \geq 0$.

Έχουμε $g(3) = 0$. Τότε $g\left(x\right) \geq g\left(3\right)$ και η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 3$.

Από το Θεώρημα Fermat ισχύει $g'\left(3\right) = 0$. Αλλά $g'\left(x\right) = \displaystyle\int_1^x f\left(t\right)dt - 2$

και για $x = 3$ έχουμε $g'\left(3\right) = \displaystyle\int_1^3 f\left(t\right)dt - 2 = 0$ ή $\displaystyle\int_1^3 f\left(t\right)dt = 2$.

β) Για $x = 0$ και $y = f(0)$ έχουμε
$4 \cdot 0 + f\left(0\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow f\left(0\right) = 3 \ \text{και}\ f'\left(0\right) = -4$.
Έχουμε :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x t^2 f(t)dt - x^3}{x^4} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\left(\displaystyle\int_0^x t^2 f(t)dt - x^3\right)'}{\left(x^4\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 f(x) - 3x^2}{4x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 3}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{4} \cdot f'\left(0\right) = \frac{-4}{4} = -1.$$

γ) **<u>1$^{\text{ος}}$ Τρόπος</u>**
Για κάθε $x > 1$ η ανίσωση γίνεται:
$\left(x - 1\right)h'\left(x\right) > h\left(x\right) \Leftrightarrow \left(x - 1\right)h'\left(x\right) - h\left(x\right) > 0$

Θέτουμε $K(x)=(x-1)h'(x)-h(x)=(x-1)f(x)-h(x)$ για $x\in[1,+\infty)$.
Έτσι έχουμε
$K'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)-h'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)-f(x)=$
$=(x-1)f'(x)>0$ για κάθε $x>1$.

Άρα η K είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ αφού είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$.

Επομένως $x>1\Leftrightarrow K(x)>K(1)\Leftrightarrow (x-1)h'(x)-h(x)>0$.

<u>2ος τρόπος</u>

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(u)=\int_1^u f(t)dt$, $u\in[1,x]$.

Η h είναι συνεχής στο $[1,\,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,x)$ με $h'(u)=f(u)$.

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x)$ ώστε $h'(\xi)=\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}$.

Αλλά $h(1)=\int_1^1 f(t)dt=0$ οπότε $h'(\xi)=\dfrac{h(x)}{x-1}$ (1). Επίσης $h'(x)=f(x)$ και $h''(x)=f'(x)>0$. Άρα η h' είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\geq 1$ και για $\xi<x$ έχουμε $h'(\xi)<h'(x)$ (2) . Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $h'(x)>\dfrac{h(x)}{x-1}$.

δ) Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=\int_1^x f(t)dt+3x-x^2$, $x\in R$.

Η φ είναι συνεχής στο $[1,3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων .
Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x)=f(x)+3-2x$.

Είναι $$\left.\begin{aligned}&\varphi(1)=2\\&\varphi(3)=\int_1^3 f(t)dt+9-9=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi(1)=\varphi(3)$$

Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,3)$ ώστε $\varphi'(\xi)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(\xi)+3-2\xi=0\Leftrightarrow f(\xi)+3=2\xi$.