Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Θεωρία από βιβλίο ΟΕΔΒ σελ 83

Β. **α.** Θεωρία από βιβλίο ΟΕΔΒ σελ 41
β. Θεωρία από βιβλίο ΟΕΔΒ σελ 113

Γ.
1. Λ
2. Σ
3. Σ
4. Λ
5. Λ

ΘΕΜΑ 2^{ο}

1.

α. $\vec{\alpha}\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 2.1.\frac{1}{2} = 1$

β.
$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2.1 = 2^2+1^2+2 = 7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \sqrt{7}$$

γ. $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta} = 2^2+1^2-2\cdot 1 = 3 \Rightarrow |\vec{\alpha}-\vec{\beta}| = \sqrt{3}$

2.

α. $\vec{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{A\Gamma}}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(3\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right) = \frac{3}{2}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$

β. $\vec{\mathrm{B\Gamma}} = \vec{\mathrm{A\Gamma}}-\vec{\mathrm{AB}} = \left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)-\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right) = \vec{\alpha}-\vec{\beta}$

3. $$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{AM}\,\hat{,}\,\vec{B\Gamma}\right)=\frac{\vec{AM}\cdot\vec{B\Gamma}}{\left|\vec{AM}\right|\cdot\left|\vec{B\Gamma}\right|}\,(i)$$

Είναι $\vec{AM}\cdot\vec{B\Gamma}=\frac{3}{2}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\frac{3}{2}\left(\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2\right)=\frac{3}{2}(4-1)=\frac{9}{2}$

και

$\left|\vec{AM}\right|=\frac{3}{2}\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\frac{3}{2}\sqrt{7}$

$\left|\vec{B\Gamma}\right|=\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\sqrt{3}$

Άρα (i) $\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\vec{AM}\,\hat{,}\,\vec{B\Gamma}\right)=\dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{7}\sqrt{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{21}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{21}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

4. Αν $\vec{A\Delta}=\pi\rho o\beta_{\vec{A\Gamma}}\vec{AM}$ τότε $\vec{A\Delta}\,//\,\vec{A\Gamma}$ δηλαδή $\vec{A\Delta}=\lambda\vec{A\Gamma}$ και

$\vec{AM}\cdot\vec{A\Gamma}=\vec{A\Delta}\cdot\vec{A\Gamma}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=\lambda\vec{A\Gamma}^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{3}{2}\left(2\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}\vec{\alpha}+\vec{\beta}^2\right)=\lambda\left(4\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow$

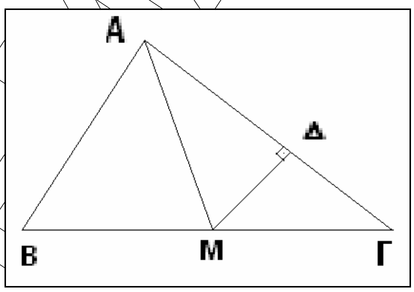
$\Leftrightarrow 3\vec{\alpha}^2+\frac{9\vec{\alpha}\vec{\beta}}{2}+\frac{3}{2}\vec{\beta}^2=4\lambda\vec{\alpha}^2+\lambda\vec{\beta}^2+4\lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cdot4+\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=16\lambda+\lambda+4\lambda\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18=21\lambda\Leftrightarrow\lambda=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$

δηλαδή $\vec{A\Delta}=\frac{6}{7}\vec{A\Gamma}\Rightarrow\left|\vec{A\Delta}\right|=\frac{6}{7}\left|\vec{A\Gamma}\right|=\frac{6\sqrt{21}}{7}$ αφού

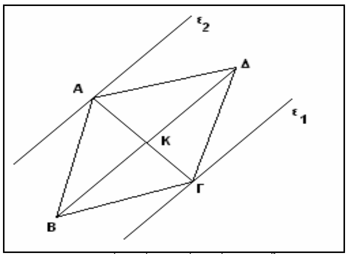
$\left|\vec{A\Gamma}\right|^2=\vec{A\Gamma}^2=\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=4\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=21\Leftrightarrow\left|\vec{A\Gamma}\right|=\sqrt{21}$



ΘΕΜΑ 3^{ο}

1. Το κέντρο Κ του παραλληλόγραμμου είναι σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ. Λύνω το (ε) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$ δηλαδή Κ(4,5)

2. Η διαγώνιος ΑΓ έχει εξίσωση y=2x-3 ⇔ 2x-y-3=0 και η ΒΔ έχει εξίσωση y=x+1 ⇔ x-y+1=0 και $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 //$ΒΔ. Αν Μ(α, β) σημείο της ευθείας (ε_1).



Τότε:

Θα είναι d(Μ,ΒΔ)=$\dfrac{d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|\alpha - \beta + 1|}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |\alpha - \beta + 1| = 2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 1 = 2 \\ \acute{\eta} \\ \alpha - \beta + 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta - 1 = 0 \\ \acute{\eta} \\ \alpha - \beta + 3 = 0 \end{cases}$$

Άρα (ε_1):x-y-1=0 και (ε_2):x-y+3=0.

3. Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των κορυφών του ΑΒΓΔ. Για την εύρεση του Α λύνω το (Σ) των εξισώσεων των (ε_1) και (ΑΓ) και για του Γ το (Σ) των (ε_2) και (ΑΓ). Έτσι έχουμε:

$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2x + 3 - 1 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ Α(2,1) και

$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2x + 3 + 3 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 9 \end{cases}$ δηλαδή Γ(6,9).

Αφού $\vec{Α\Delta} = (4,6)$ και Α(2,1) τότε αν Δ(x_Δ, y_Δ) θα είναι:

$\begin{cases} x_\Delta - 2 = 4 \\ y_\Delta - 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Delta = 6 \\ y_\Delta = 7 \end{cases}$ δηλαδή Δ(6,7) και αφού Κ μέσο ΒΔ θα είναι:

$$\begin{cases} x_\kappa = \dfrac{x_{\mathrm{B}} + x_\Delta}{2} \\ y_\kappa = \dfrac{y_{\mathrm{B}} + y_\Delta}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = \dfrac{x_{\mathrm{B}} + 6}{2} \\ 5 = \dfrac{y_{\mathrm{B}} + 7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{B}} = 2 \\ y_\Delta = 3 \end{cases} \text{δηλαδή Β(2,3)}$$

4. $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = 2(\mathrm{AB\Delta}) = 2\dfrac{1}{2}\left|\det(\vec{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{A\Delta}})\right| = \left\|\begin{matrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{matrix}\right\| = |0-8| = 8\tau.\mu.$

ΘΕΜΑ 4ο

1. Είναι

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma = (-2\eta\mu\theta)^2 + (4\sigma\upsilon\nu\theta)^2 - 4\eta\mu^2\theta =$$

$$= 4\eta\mu^2\theta + 16\sigma\upsilon\nu^2\theta - 4\eta\mu^2\theta = 16\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0 \text{ αν } \theta \in \left(0, \frac{\Pi}{2}\right)$$

Άρα είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $\mathrm{K}\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$ δηλαδή Κ(ημθ,-2συνθ) και ακτίνα $\rho = \dfrac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}}{2} = \dfrac{4\sigma\upsilon\nu\theta}{2} = 2\sigma\upsilon\nu\theta$.

2. Είναι $\begin{rcases} x_\kappa = \eta\mu\theta \\ y_\kappa = -2\sigma\upsilon\nu\theta \end{rcases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\theta = x_\kappa \\ \sigma\upsilon\nu\theta = -\dfrac{y_\kappa}{2} \end{cases}$ οπότε $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow x_\kappa + \dfrac{y^2_\kappa}{4} = 1$

δηλαδή τα κέντρα των κύκλων κινούνται σε έλλειψη με εστίες στον άξονα y΄y. Είναι $a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$ και $\beta^2 = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$ οπότε $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 4 - 1 = 3 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{3}$. Έχει λοιπόν εστίες Ε΄(0,-$\sqrt{3}$) και Ε(0, $\sqrt{3}$) μεγάλο άξονα 2α=2.2=4 και μικρό άξονα 2β=2 και εκκεντρότητα ε=$\dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

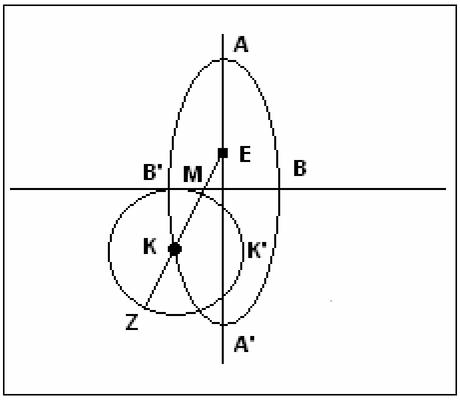
3. Είναι $x_0 = \eta\mu\theta > 0$ και $y_0 = -2\sigma\upsilon\nu\theta < 0$ γιατί θ ∈ (0, π/2) οπότε τα σημεία Κ ανήκουν στο τμήμα της έλλειψης που βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο δηλαδή το Α΄Β.

4. Αν θ=$\dfrac{\Pi}{3}$ τότε ο κύκλος έχει κέντρο $\mathrm{K}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$ και ρ=1. Τότε η ελάχιστη απόσταση της ευθείας Ε(0, $\sqrt{3}$) από τον κύκλο είναι

$d_1 =$

$$=(\mathrm{EM})=(\mathrm{EK})-\rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 + \left(-1-\sqrt{3}\right)^2} - 1 = \sqrt{\frac{3}{4} + 1 + 3 + 2\sqrt{3}} - 1 = \sqrt{\frac{19}{4} + 2\sqrt{3}} - 1 =$$

$= 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ενώ η μέγιστη είναι $d_2 = (\mathrm{EZ}) = (\mathrm{EK}) + \rho = \sqrt{\dfrac{19}{4} + 2\sqrt{3}} + 1 = 3 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.


A
E
B'
M
B
K
K'
Z
A'